XLiFE++ TP4
Problèmes multi-inconnues

E. Lunéville

2015

L'objet de ce TP est de réaliser à l'aide e XLIFE++ la programmation de problèmes multi-inconnues. On s'interessera dans un premier temps à la résolution du problème de Laplace par méthode mixte et dans un second temps à la résolution du problème de Stokes.

1 Le problème de Laplace par méthode mixte

On considère le problème de Laplace sur un domaine borné Ω de frontière Γ :

$$\boxed{\begin{array}{ll} -\triangle u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array}} \tag{1}$$

En posant $p = \nabla u$, ce problème se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mathrm{div}\, p = f & \text{sur } \Omega \\ p = \nabla u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array}\right. \tag{2}$$

dont une formulation variationnelle est : trouver $(u,p) \in L^2(\Omega) \times H(\mathrm{div},\Omega)$ tels que pour tout $(v,q) \in L^2(\Omega) \times H(\mathrm{div},\Omega)$:

$$\int_\Omega p.q + \int_\Omega u\,\mathrm{div} q - \int_\Omega \mathrm{div} p\, v = \int_\Omega f\, v. \tag{3}$$

- En utilisant des éléments de Raviart-Thomas pour approcher le vecteur p et des éléments finis de Lagrange pour approcher u, écrire le programme XLiFE++ permettant de résoudre le problème (3) sur le carré $]0,1[\times]0,1[$.

- A l'aide de solutions exactes, calculer les erreurs L^2 commises sur u et p.
- Etendre au cas tridimensionnel

2 Le problème de Stokes

On considère le problème de la cavité entraînée dans un domaine $\Omega =]0,1[\times]0,1[$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} -\nu \triangle \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = (0, v_0) & \text{sur } \Sigma = \{0\}\times]0,1[\\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \backslash \Sigma \end{array}} \tag{4}$$

We introduce the penalized problem :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\nu \bigtriangleup \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = \varepsilon p & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = (0, v_0) & \text{sur } \Sigma = \{0\} \times]0,1[\\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \backslash \Sigma \end{array}\right. \tag{5}$$

dont une formulation est trouver $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega)^2 \times L^2_0(\Omega)$ tels que pour tout $(\mathbf{v}, p) \in H^1_0(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} - \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}\, q = \int_\Omega \mathbf{f}\, \mathbf{v} + \varepsilon \int_\Omega p\, q \\ \mathbf{u} = (0, v_0) \text{ sur } \Sigma \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma \end{array}\right. . \tag{6}$$

– En utilisant des éléments de Lagrange pour approcher la vitesse u et la pression p, écrire le programme XLiFE++ permettant de résoudre le problème (3) sur le carré $]0,1[\times]0,1[$.

– Etudier différents choix d'ordre d'éléments finis de Lagrange pour u et p.

3 Correction

```
using namespace xlifepp;
using namespace std;

Vector<Real> g(const Point& p, Parameters& pa = defaultParameters)
{
  Vector<Real> r(2,0.);
  r(2)=1.;
  return r;
}

int main()
{
init(_lang=en);
verboseLevel(1);

Square sq(_origin=Point(0.,0.),_length=1., _nnodes=20, _domain_name="Omega",
_side_names=Strings("Gamma","Gamma", "Gamma", "Sigma"));
Mesh mesh(sq, _triangle);
Domain Omega=mesh.domain("Omega");
Domain Sigma=mesh.domain("Sigma");
Domain Gamma=mesh.domain("Gamma");

Space L2(Omega,_P0,"L2"); Unknown p(L2,"p"); TestFunction q(p,"q");
Space H1(Omega,_P1,"H1"); Unknown u(H1,"u",2); TestFunction v(u,"v");

Real eps=0.0001;
BilinearForm a=intg(Omega,grad(u)%grad(v))-intg(Omega,p*div(v))-intg(Omega,div(u)*q)
               + eps*intg(Omega,p*q);
EssentialConditions ecs = (u|Gamma = 0) & (u | Sigma = g);
TermMatrix A(a,ecs,"A");
TermVector b(u,Omega,0.);
TermVector X=directSolve(A,b);
saveToFile("p",X(p),_vtu); saveToFile("u",X(u),_vtu);

return 0
}
```